

$(V, +)$ spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2(\mathbb{R}) \text{ s. vett. su } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2(\mathbb{Q}) \text{ è anche s. vett. su } \mathbb{Q}.$$

$V(\mathbb{K})$

- 1) Quali sono le proprietà di uno s. vett.?
- 2) Quali sono le sott Strutture di uno s. vett.?
- 3) Quali sono le funzioni che preservano le strutture algebriche?

i) $(\mathbb{R}^2, +)$ con prod. per scalare

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a, (a, b)) \rightarrow (aa, ab)$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} (\bar{v}, \bar{w}) &\rightarrow \bar{v} + \bar{w} = (a, b) + (c, d) = \\ &= (a+c, b+d). \end{aligned}$$

1') $(\mathbb{K}^2, +)$ come vettoriale su $\mathbb{K}$

1'') $(\mathbb{K}^2, +)$ prendiamo $(\mathbb{K}^n, +)$ con $n \geq 1$ intero.

in particolare $(\mathbb{K}, +)$ è vettoriale su $\mathbb{K}$.

2) $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ come vettoriale su $\mathbb{K}$.

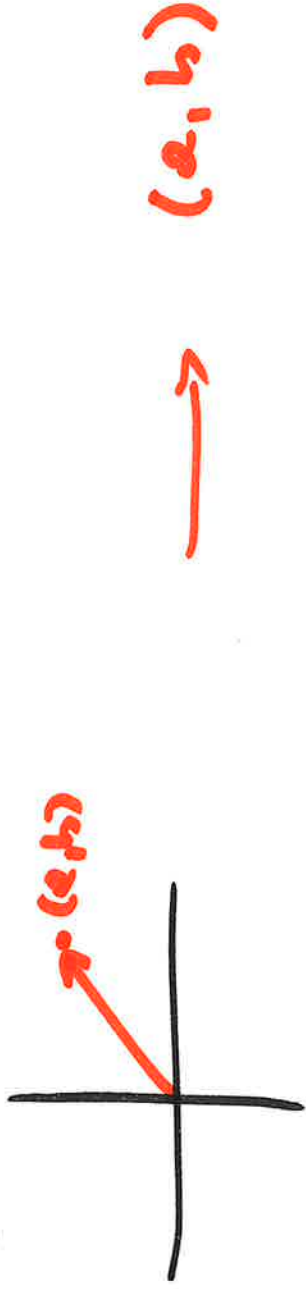
$$f: \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{m,n}$$
$$\left[\begin{array}{c} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{array} \right] \rightarrow (a_{11} \dots a_{1n} \dots a_{m1} \dots a_{mn})$$

f è un isomorfismo.

$$f(\alpha M) = \alpha f(M) \quad f(M+N) = f(M) + f(N)$$

ed f è biettiva.

3) S. vettoriale dei vettori "liberi" $\cong \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$
nel piano



$$4) |K[x]| = \{ f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

$$f(x) = \sum_i a_i x^i \quad g(x) = \sum_i b_i x^i$$

$$(f+g)(x) = \sum_i (a_i + b_i) x^i \quad (\alpha f)(x) = \sum (\alpha a_i) x^i$$

$$5) \mathbb{K}[x]_{\leq d} := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] : \deg f(x) \leq d\}.$$

s. vettoriale

$$= \left\{ \sum_{i=0}^d a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}$$

$\deg f = \text{grado di } f$.

$$\cong \mathbb{K}^{d+1}$$

$$\sum_{i=0}^d a_i x^i \mapsto (a_0 a_1 \dots a_d)$$

$$\mathbb{K}[x]_{\leq d} \subseteq \mathbb{K}[x] \quad \text{sottoinsieme} \quad \text{ma anche sottospazio.}$$

6) Sia A un insieme $A \neq \emptyset$ e $\mathbb{K}$ un campo
 L'insieme $\mathbb{K}^A := \{f: A \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ funzione}\}$
 è uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

con

$$(f+g)(x) := (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

$$\forall x \in A, \forall f, g \in \mathcal{F}_A, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

→ nei sottospazi sono quello delle f_n (ad es. $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$)
reali e continue, reali e derivabili, etc.

Siano $V(\mathbb{K}), W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali
e sia $\text{Hom}(V, W) := \{ f: V \rightarrow W \mid f \text{ lineare} \}$.

⇒ $\text{Hom}(V; W)$ è sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.

Bisogna far vedere che se $f, g: V \rightarrow W$ sono lineari:
⇒ anche $f+g$ e αf sono lineari.

Def: Una funzione $f: V \rightarrow W$ con $V(K), W(K)$ spazi vettoriali è detta lineare (o omomorfismo di spazi vettoriali) se

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V: f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})}$$

Supponiamo $\alpha, \beta \in K, f, g$ lineari $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\alpha f)(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) &= \alpha \cdot f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \\ &= \alpha \cdot f(\alpha \bar{u}) + \alpha \cdot f(\beta \bar{v}) = \\ &= f(\alpha \alpha \bar{u}) + f(\beta \alpha \bar{v}) = \\ &= (\alpha \alpha) f(\bar{u}) + (\beta \alpha) f(\bar{v}) = \\ &= \alpha (\alpha f)(\bar{u}) + \beta (\alpha f)(\bar{v}). \end{aligned}$$

discorso analogo per $(f+g)(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \dots$
 $= \alpha(f+g)(\bar{u}) + \beta(f+g)(\bar{v})$.

Proposizione: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su K .
 allora valgono le seguenti due proprietà:
 $\forall \alpha \in K \quad \forall \vec{v} \in V \quad \alpha \vec{v} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ oppure $\vec{v} = \vec{0}$

$$\alpha \vec{v} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \text{ oppure } \vec{v} = \vec{0}$$

2) Se $(-1) \in K$ è l'elemento tale che $(-1) + 1 = 0$

$$\Rightarrow (-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

$$\text{Dim: } \forall \vec{v} \in V \quad \vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V \quad (1) \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v} = (0+0) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$$

$$= (\vec{0} \cdot \vec{0}) + (\vec{0} \cdot \vec{v}) + (\vec{0} \cdot \vec{v}) = \vec{0}$$

$$= (\vec{0} \cdot \vec{0}) + (\vec{0} \cdot \vec{v}) + (\vec{0} \cdot \vec{v}) = \vec{0}$$

$$= (\vec{0} \cdot \vec{v})$$

$$\forall a \in K: a \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$a \cdot \underline{0} = a \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = a \cdot \underline{0} + a \cdot \underline{0}$$

rimuoviamo a dx e sx $(-a \cdot \underline{0})$ ed otteniamo

$$\underline{0} = (-a \cdot \underline{0}) + (a \cdot \underline{0}) = (-a \cdot \underline{0}) + (a \cdot \underline{0}) + (a \cdot \underline{0}) = (a \cdot \underline{0})$$

Hp: Supponiamo $a \cdot \bar{v} = \underline{0}$ con $a \neq 0$

Ts: dobbiamo far vedere $\bar{v} = \underline{0}$

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in K: a^{-1}a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \bar{v}) = a^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

"

$$(a^{-1}a) \bar{v} = 1 \bar{v} = \bar{v}$$

#

2) Calcoliamo $\bar{V} \in V$ $(-1) \cdot \bar{V} + \bar{V} =$
 $= -1 \cdot \bar{V} + 1 \cdot \bar{V} = (-1+1) \cdot \bar{V} = 0 \cdot \bar{V} = \underline{0}$
 per cui $(-\bar{V})$ è l'opposto di $\bar{V}$

$$(-1) \cdot \bar{V} + \bar{V} = \underline{0} + (-\bar{V}) = \underline{-\bar{V}}$$

$$\stackrel{||}{=} \underline{(-1) \cdot \bar{V}}$$

□

Def: Sia $V(K)$ uno s.v. finito su K e sia
 $W \subseteq V$ con $W \neq \emptyset$

W è un sotto spazio vettoriale se sostituendo
 "w" nella def. delle operazioni di V abbiamo
 che W soddisfa gli assiomi di s.v. vettoriale.

admiss (+1)

$$||x|| \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow V$$

vale che

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$V \cdot V = V$$

$$W \leq V$$

(e sottospazio).

W deve essere uno

spazio vettoriale rispetto

la restrizione troncata

delle operazioni di V

a W.

oss: coe proprietà sono

gratis:

ATTRE VANNO VERIFICATE.

1) l'imm. del prod. per

scelte di un vettore di W

per V a el k sia in W.

- 2) che la somma di ob. di W sia un elemento di W
- 3) che $0 \in W$
- 4) che $\forall \bar{w} \in W: (-\bar{w}) \in W$

PROPRIETÀ DI CHIUSURA

DATO W non è possibile uscire da W con le operazioni di v. vettoriale ereditate da V applicate ai suoi elementi.

Teorema: W è sottospazio vettoriale di $V(K)$ se e solamente se W è chiuso rispetto alle combinazioni lineari cioè

$$(*) \quad \boxed{\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \bar{u}, \bar{w} \in W: \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in W}$$

Dim: Se $W \leq V(K)$ $\Rightarrow$ ogni comb. lineare di un numero finito di vettori di W deve appartenere a W .
In particolare $(*)$ vale.

Viceversa: supponiamo $(*)$ valga e mostriamo
 $W \leq V(K)$.

$$1) \quad +: W \times W \rightarrow W \quad \text{in fatti } 1 \in K$$

$$\text{per } (*) \quad \forall \bar{u}, \bar{w} \in W: \bar{u} + \bar{w} = 1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{w} \in W$$

$$2) \quad 0 \in K \Rightarrow \text{per } (*) \quad \forall \bar{u}, \bar{w} \in W: 0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{w} = 0 + 0 = 0$$

$$3) \quad -1 \in K \Rightarrow \text{per } (*) \quad \forall \bar{u}, \bar{w} \in W: (-1) \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{w} = (-1) \cdot \bar{u} = -\bar{u} \in W.$$

$$4) \quad 0 \in K: \forall \alpha \in K, \forall \bar{u}, \bar{w} \in W: \alpha \bar{w} = 0 \cdot \bar{u} + \alpha \cdot \bar{w} \in W$$

per $\circ: K \times W \rightarrow W$ è ben def. □

In $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$1) W = \{(a, b) : a \geq 0\}.$$

$$0 \in W \quad (a, b), (c, d) \in W$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \in W$$

$$-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin W$$

$\rightarrow W$ é subespaço.

$$2) W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 1\}.$$

$$0 = (0, 0) \notin W$$

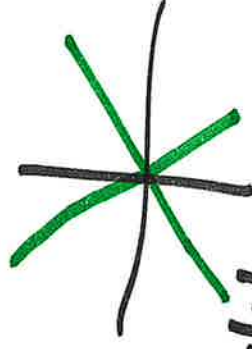
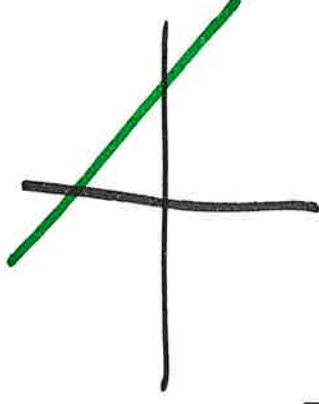
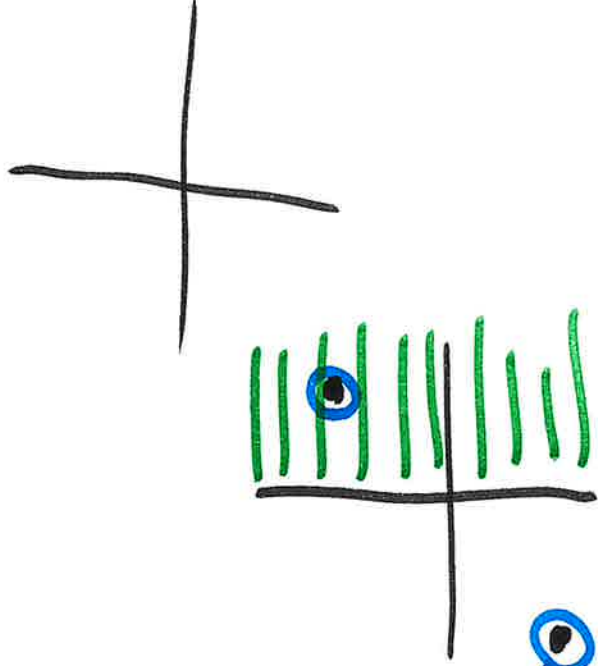
$$3) W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 - b^2 = 0\}.$$

$$0 \in W$$

$$(a, b) \in W \Rightarrow a(a, b) \in W$$

$$\forall a \in \mathbb{R}$$

$$M \in (a', a) = (a', -a)$$



$$(1, -1) \in W$$

$$(1, 1) \in W$$

$$(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin W$$

$$\{0 = q + 0 : (q, 0) \in W\} = W \quad (4)$$

$$\exists (p, c), (q, d) \in W$$

$$\alpha(a, b) + \beta(c, d) \in W$$

$$(a, b) \in W \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$(c, d) \in W \Leftrightarrow c + d = 0$$

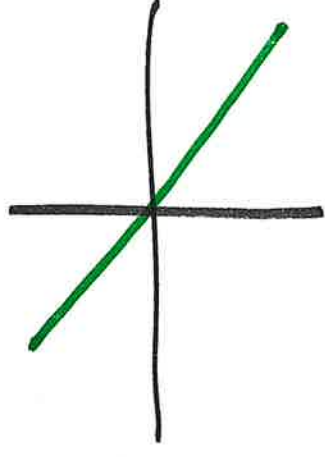
$$\alpha(a, b) + \beta(c, d) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d) =$$

$$= (x, y)$$

$$x + y = (\alpha a + \beta c) + (\alpha b + \beta d) = \alpha(a + b) + \beta(c + d) =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$(x, y) \in W$$



oss: Sia $\mathbb{K}^n$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.

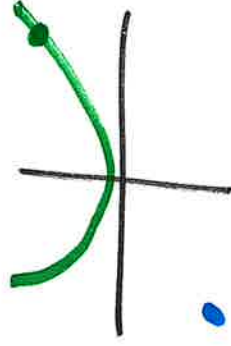
$W \subseteq \mathbb{K}^n$ se e solamente se W può essere descritto come l'insieme delle soluzioni di un SISTEMA LINEARE OMOGENEO cioè

delle soluzioni di una collezione di equazioni di I grado nelle componenti dei vettori e a coeff. in $\mathbb{K}$ tutte con termine noto = 0.

$W = \{ \text{partic. } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0, z + 3x + y = 0 \}$
è sol. ^{due}

$W = \{ (x, y, z) : x + 3y - 2z = 0 \}$ non è sottospazio.

$W = \{ (x, y) : y = x^2 \}$



per quali valori di k

$W_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + kxy + y^2 = 0\}$
è spazio vettoriale $\subseteq \mathbb{R}^2$?

1) $(0, 0) \in W_k \quad \forall k \in \mathbb{R}$. Sia $\Delta = x^2(k^2 - 4)$.

Allora
$$y = \frac{1}{2}(-kx \pm \sqrt{\Delta}) \quad (*)$$

2) Se $\Delta = 0$ cioè $k = \pm 2 \Rightarrow W_{\pm 2} = \{(x, y) \mid (x \pm y)^2 = 0\} = \{(x, y) \mid (x \pm y) = 0\}$
in particolare W_2 e W_{-2} sono sottospazi.

3) Se $\Delta < 0$, cioè $|k| < 2 \Rightarrow (*)$ NON HA SOLUZIONI REALI SE $x \neq 0$
 $\Rightarrow W_k = \{(0, 0)\} \Rightarrow W_k$ sottospazio.

4) Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ i punti: $(1, -\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta})$ e $(1, -\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}) \in W_k$

Se W_k fosse sottospazio $\Rightarrow (1, -\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}) - (1, -\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}) \in W_k$
ma $(0, \sqrt{\Delta}) \in W_k$ è possibile $\Leftrightarrow |\Delta| = \sqrt{\Delta}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \nabla$

In sintesi:

Se $|k| > 2$: W_k non è sottospazio

Se $k = +2$: $W_k = \{ (x, y) : x + y = 0 \}$ sottospazio

Se $k = -2$: $W_k = \{ (x, y) : x - y = 0 \}$ " sottospazio

Se $|k| < 2$: $W_k = \{ (0, 0) \}$ sottospazio BANALE.